Processus géométrique généralisé et applications en fiabilité

Laurent Bordes [1] & Sophie Mercier [2]

[1,2] *Université de Pau et des Pays de l'Adour*
Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications - Pau
UMR CNRS 5142
[1] *laurent.bordes@univ-pau.fr*
[2] *sophie.mercier@univ-pau.fr*

Résumé. Les processus de renouvellement sont fréquemment utilisés en fiabilité pour décrire les instants successifs de défaillance d'un système soumis à une maintenance parfaite et instantanée. En situation de maintenance imparfaite, différents modèles ont été proposés, parmi lesquels les processus géométriques introduits par Lam dans [6]. Dans ce modèle, les temps inter-défaillances sont indépendants et identiquement distribués à un facteur d'échelle près $a > 0$, et ce de manière géométrique. Une limitation de ce modèle réside en la décroissance ou la croissance très rapide des temps inter-défaillances résultant de la progression géométrique.

Nous considérons ici une version plus flexible où une évolution non géométrique du facteur d'échelle est possible. Le processus de comptage correspondant est dit Processus Géométrique Étendu (PGE). Une première étape dans l'étude des PGE concerne l'ajustement semi-paramétrique basée sur l'observation de n temps inter-défaillances. Nous considérons dans un premier temps l'estimation du paramètre euclidien en suivant une démarche proposée par Lam, puis nous proposons une estimation de la distribution du processus de renouvellement sous-jacent. Plusieurs résultats de convergence, incluant des vitesses de convergence, sont obtenus.

Ensuite nous en venons à l'application des PGE en fiabilité où les temps de saut du processus sont des temps de défaillance et où les maintenances sont supposées instantanées. Une première quantité d'intérêt est la pseudo-fonction de renouvellement associée à un PGE, dont on montre qu'elle satisfait une pseudo-équation de renouvellement. Lorsque le système se détériore (cas $a < 1$), une politique de maintenance préventive est proposée : lorsqu'un temps inter-défaillances est inférieur à un seuil prédéfini, le système est considéré trop détérioré et est remplacé à neuf. Cette politique de maintenance est évaluée via une fonction coût, sur un horizon infini. Cette étude est illustrée numériquement.

Mots-clés. Maintenance imparfaite, processus de renouvellement, estimation semi-paramétrique.

Abstract. Renewal processes have been widely used in reliability, to describe successive failure times of systems submitted to perfect and instantaneous maintenance actions.

In case of imperfect maintenance, different models have been developed to take this feature into account, among which geometric processes introduced by Lam in [6]. In such a model, successive lifetimes are independent and identically distributed up to a multiplicative scale parameter $a > 0$, in a geometric fashion. A drawback in Lam's setting is the fast increase or decrease of the successive periods, induced by the geometric progression. We here envision a more flexible progression, where the multiplicative scaling factor is not necessarily a geometric progression any more. The corresponding counting process is here named Extended Geometric Process (EGP). As a first step in the study of an EGP, we consider its semiparametric estimation based on the observation of the n first gap times. We start with the estimation of the Euclidean parameter a following the regression method proposed by Lam. We next proceed to the estimation of the unknown distribution of the underlying renewal process. Several consistency results, including convergence rates, are obtained.

We next turn to applications of EGPs to reliability, where successive arrival times stand for failure (and instantaneous maintenance) times. A first quantity of interest is the pseudo-renewal function associated to an EGP, which is proved to fulfill a pseudo-renewal equation. When the system is deteriorating (case $a < 1$), a preventive renewal policy is proposed: as soon as a lifetime is observed to be too short, under a predefined threshold, the system is considered as too deteriorated and replaced by a new one. This renewal policy is assessed through a cost function, on an infinite horizon time. Numerical experiments illustrate the study.

Keywords. Imperfect maintenance, renewal processes, semiparametric estimation.

1 Le processus géométrique étendu

Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ les temps de défaillance successifs d'un système satisfaisant $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n < \cdots$. On définit les temps inter-défaillances par $X_n = T_n - T_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et on suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ satisfait $X_n = a^{b_n} Y_n$, où $(Y_n)_{n\geq 1}$ est la suite des temps d'inter-arrivées d'un processus de renouvellement (PR), $a \in]0, +\infty[$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de réels positifs telle que $b_1 = 0$ et b_n diverge vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Pour éviter les cas particuliers on suppose que Y_1 vérifie $\mathbb{P}(Y_1 > 0) > 0$. Ce modèle, développé dans [3], étend la définition du processus géométrique de Lam qui ne considère que le cas où $b_n = n - 1$ et $X_n = a^{n-1} Y_n$ (pour $n \geq 1$) (voir [6]).

Bien que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ puisse être paramétrée, ici nous supposons que $(b_n)_{n\geq 1}$ est complètement spécifiée. Par conséquent, les paramètres inconnus sont $a \in]0, +\infty[$ et la fonction de répartition (f.d.r.) F du processus de renouvellement sous-jacent $(Y_n)_{n\geq 1}$. Nous avons donc affaire à un modèle de type semi-paramétrique.

2 Estimation semi-paramétrique

Supposons $T_1 < \cdots < T_n$ observés, on s'intéresse à l'estimation de a et F. Concernant le paramètre euclidien a, on suit la méthode proposée par Lam dans une série d'articles (voir [6]). L'estimateur de a se déduit d'une régression linéaire simple conduisant à l'estimateur

$$\hat{a}_n = \exp\left(\frac{n^{-1}\sum_{k=1}^n b_k \log X_k - n^{-2}\sum_{k=1}^n \log X_k \sum_{i=1}^n b_i}{n^{-1}\sum_{k=1}^n b_k^2 - \left(n^{-1}\sum_{k=1}^n b_k\right)^2}\right).$$

Partant de $\hat{a}_n$, on construit une pseudo version $(\tilde{Y}_n)_{n\geq 1}$ des temps inter-arrivées $(Y_n)_{n\geq 1}$ en posant $\tilde{Y}_n = \hat{a}_n^{-b_n} X_n$. Alors on peut espérer estimer F par la f.d.r. empirique $\hat{F}_n$ définie par

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{\tilde{Y}_k \leq x\}}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, où $\mathbf{1}_{\{.\}}$ désigne la fonction indicatrice d'ensembles.

Posons $\mathrm{var}(e_n) = \sigma^2$, $\alpha_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n b_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n b_k\right)^2$ et $\theta_n = \alpha_n\sqrt{n}$. En utilisant des résultats de [1, 2, 5], portant sur le comportement asymptotique de sommes pondérées de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, nous obtenons les résultats suivant si $\mathbb{E}((\log X_1)^2) < +\infty$:

1. $\alpha_n(\hat{a}_n - a) \xrightarrow{p.s.} 0$,
2. $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\alpha_n^2}{b_n\sqrt{\log n}} |\log(\hat{a}_n) - \log(a)| \leq 2\sqrt{2}\sigma \quad$ p.s.,
3. Si de plus $\theta_n/b_n \to +\infty$, alors $\theta_n(\hat{a}_n - a) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, a^2\sigma^2)$,
4. Si de plus $\log(X_1)$ admet une densité g bornée et
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{b_n^2\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}\alpha_n^2} = 0,$$
alors $\|\hat{F}_n - F\|_\infty$ converge vers 0 presque sûrement lorsque n tend vers l'infini.

Si par exemple $b_n = (n-1)^\gamma$ avec $\gamma > 0$, on a

$$\theta_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{\gamma n^{\gamma+1/2}}{(\gamma+1)\sqrt{2\gamma+1}}$$

et la condition $\theta_n/b_n \to +\infty$ est satisfaite. Lorsque $b_n = n-1$, on obtient le même résultat de normalité asymptotique pour $n^{3/2}(\hat{a}_n - a)$, que celui énoncé par Lam [6].

Cette partie s'achève par une application à des données réelles concernant les $n = 29$ défaillances successives du système de climatisation de la cabine d'un Boeing 720 (voir [7]) et par une étude de Monte Carlo permettant d'appréhender le comportement des estimateurs à distance finie.

3 Applications en fiabilité

Considérons maintenant un système réparable, dont les réparations sont instantanées et dont les temps de panne sont modélisés par un PGE. Si les paramètres du PGE sont estimés ou connus, ce modèle peut être utilisé à des fins de prévision et/ou d'optimisation de la politique de maintenance. Pour un objectif de prévision, une quantité d'intérêt typique peut être le nombre moyen de défaillances survenues dans l'intervalle de temps $[0, t]$, c'est-à-dire la pseudo fonction de renouvellement associée à un PGE vu comme processus de comptage.

3.1 Pseudo-fonction de renouvellement

Dans un premier temps on propose des conditions pour que la pseudo fonction de renouvellement soit finie. D'après [4] une condition nécessaire est $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ presque sûrement. Utilisant une version de la loi forte des grands nombres pour variables aléatoires indépendantes mais non identiquement distribuées [8], on montre que cette condition est équivalente à $\sum_{i\geq 1} a^{b_i} = +\infty$, condition supposée satisfaite dans ce qui suit.

Si $N(t) = \sum_{i\geq 1} \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}}$ $(t \geq 0)$ notons $n_k(t)$ l'espérance mathématique de $N(t)$ lorsque X_1 est distribuée selon la loi de $a^{b_k} Y_k$. La fonction de renouvellement d'intérêt étant $n(t) = n_1(t)$, en supposant que $\lim_{n\to+\infty} n a^{b_n} > 1/\mathbb{E}\left(Y_1\right)$ on montre que :

1. $n_k\left(t\right) < +\infty$ pour tout $t \geq 0$ et tout $k \geq 1$.

2. n_k satisfait l'équation de renouvellement markovien

$$n_k = F_k + f_k * n_{k+1},$$

pour tout $k \geq 1$, où F_k (resp. f_k) désigne la f.d.r. (resp. densité) de X_k.

Pour le cas $a \geq 1$ nous proposons une méthode numérique permettant d'approcher n_k. En revanche, pour $a < 1$ la pseudo fonction de renouvellement peut être approchée par une méthode de Monte-Carlo. Toutefois nous obtenons un minorant $n_c(t)$ de $n(t)$ qui converge vers $n(t)$ lorsque c tend vers 0 fournissant ainsi une approximation par défaut de $n(t)$.

3.2 Une politique de remplacement

Lorsque les temps inter-défaillances sont décroissants (cas $a < 1$), une politique préventive de remplacement est étudiée. Elle suppose le remplacement du système, dont le coût est c_R, dès qu'un temps inter-défaillances X_i est inférieur à un niveau prédéfini s $(s > 0)$. Le coût de réparation (instantané) est égal à c_F, avec $c_R \geq c_F$. On pose $C(s)$ le coût asymptotique par unité de temps de cette politique de remplacement. Par des arguments classiques de la théorie du renouvellement nous montrons d'une part l'existence de $C(s)$

et d'autre part nous obtenons son expression. En effet, en supposant $a \in]0,1[$ et en notant $C(s;[0,t])$, le coût cumulé sur l'intervalle de temps $[0,t]$ pour un seuil s, le coût asymptotique par unité de temps existe presque sûrement et s'obtient par

$$C(s) = \lim_{t\to+\infty} \frac{C(s;[0,t])}{t} = \frac{c_R + c_F \mathbb{E}(\tau^s - 1)}{\mathbb{E}(T_{\tau^s})} \text{ p.s.}$$

où $\tau^s = \inf\{n \geq 1 : X_n < s\}$. De plus

$$\mathbb{E}(\tau^s - 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k^s \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T_{\tau^s}) = \mathbb{E}(Y_1)\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a^{b_{k+1}}\ v_k^s\right)$$

avec

$$v_k^s = \prod_{i=1}^{k} \bar{F}\left(\frac{s}{a^{b_i}}\right) \text{ pour tout } k \geq 1 \text{ et } \bar{F} = 1 - F.$$

Des outils numériques ont été développés pour approcher $C(s)$. Des résultats numériques illustrent à la fois l'approximation de la pseudo-fonction de renouvellement ainsi que le calcul approché du coût asymptotique unitaire $C(s)$ de la politique de remplacement en fonction du seuil s.

Bibliographie

[1] Bai, Z. D. et Cheng P. E. Marcinkiewicz strong laws for linear statistics, *Statistics & Probability Letters*, 46, 105–112.

[2] Bai, Z. D., Cheng, P. E. et Zhang C. H. An extension of Hardy-Littlewood strong law, *Statistica Sinica*, 7, 923–928.

[3] Bordes, L. et Mercier, S. (2011). Extended geometric processes: semiparametric estimation and application to reliability, *submitted*.

[4] Çinlar, E. (1975). *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

[5] Cuzick, J. A. (1995). Strong law for large for weighted sums of I.I.D. random variables, *Journal of Theoretical Probability*, 8(3), 625–641.

[6] Lam, Y. (2007). *The Geometric Process and its Applications*, World Scientific.

[7] Lindsey, J. K. (2004). *Statistical Analysis of Stochastic Processes in Time*, Cambridge University Press.

[8] Petrov, V. V. (1995). *Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables*, Oxford University Press.